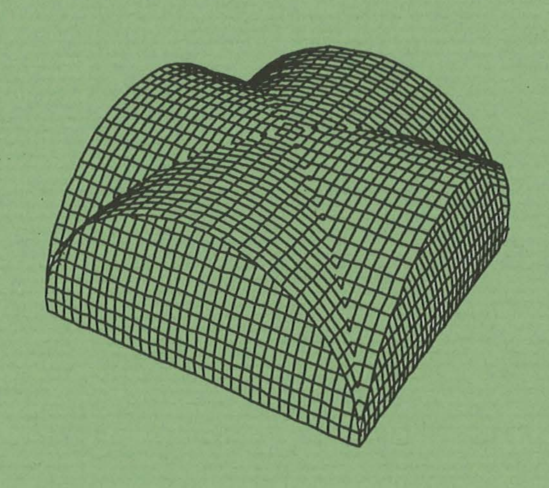
INTEGRALES MÚLTIPLES

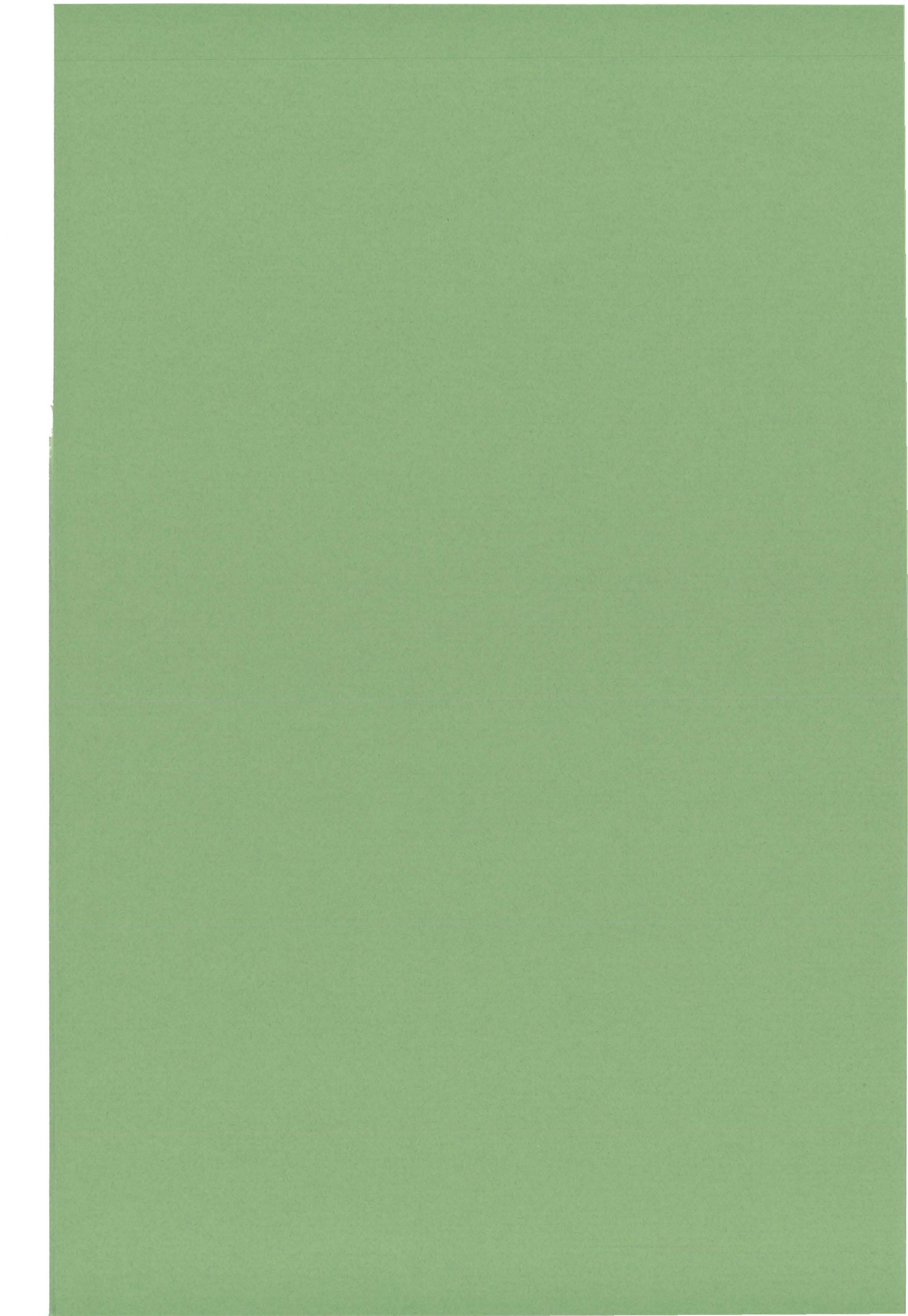
por

MIGUEL DE UNAMUNO ADARRAGA



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-07-02



INTEGRALES MÚLTIPLES

por

MIGUEL DE UNAMUNO ADARRAGA

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-07-02

C U A D E R N O S
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

3 Área
7 Autor
02 Ordinal de cuaderno (del autor)

Integrales múltiples

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Laura Bejerano Iglesias
CUADERNO 15.02 / 3-07-02
ISBN: 84-9728-083-0
Depósito Legal: M-35902-2003

I - Integral doble

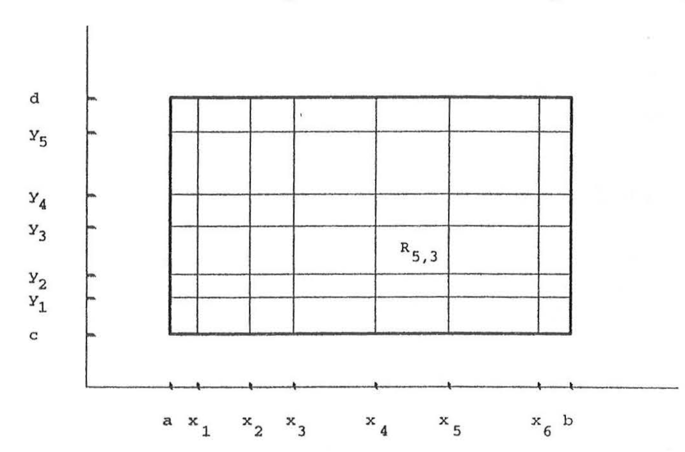
Integral doble de una función acotada en un rectángulo

Consideremos una función acotada

$$f : R \to \mathbf{R},$$

siendo $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectángulo del plano real, y sendas particiones

$$p = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}, \qquad q = \{y_0 = c, y_1, \ldots, y_m = d\}$$



de los dos intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$ de $\mathbf{R}$. Quedarán definidos $m \cdot n$ rectángulos elementales (en la figura $m = 7$, $n = 6$),

$$R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],$$

en cada uno de los cuales f, como función acotada, tendrá dos extremos,

$$M_{i,j} = \sup_{R_{i,j}} f(x,y), \quad m_{i,j} = \inf_{R_{i,j}} f(x,y).$$

Formemos las sumas

$$S(p,q) = \sum_{i,j} M_{i,j} \, A(R_{i,j}), \quad s(p,q) = \sum_{i,j} m_{i,j} \, A(R_{i,j}),$$

donde $A(R_{i,j})$ es el área de $R_{i,j}$.

Evidentemente,

$$s(p,q) \le S(p,q).$$

Y lo mismo que en una variable, se demuestra que, para cualesquiera particiones p, p' de $[a,b]$ y q, q' *de* $[c,d]$, es

$$s(p,q) \leq S(p',q').$$

Con lo cual,

$$\Sigma = \{S(p,q) |\ p,\ q \text{ particiones de } [a,b], [c,d] \text{ resp.}\}$$

es un conjunto inferiormente acotado (por cualquier $s(p,q)$), y

$$\sigma = \{s(p,q) |\ p,\ q \text{ particiones de } [a,b], [c,d] \text{ resp.}\}$$

es superiormente acotado (por cualquier $S(p,q)$); luego existen su ínfimo y su supremo, respectivamente. Llamamos entonces:

Integral superior de f en R: $\overline{\int_R} f = \inf \Sigma$, e *integral inferior* de f en R: $\underline{\int_R} f = \sup \sigma$, siendo evidentemente

$$\overline{\int_R} f \geq \underline{\int_R} f.$$

Definición. Se dice que *f es integrable en R* si y sólo si

$$\overline{\int_R} f = \underline{\int_R} f;$$

a este número real se le llama entonces *integral de f en R*, con las notaciones

$$\int_R f, \quad \text{o} \quad \int_R f\,dx\,dy, \quad \text{o} \quad \int_R f(x,y)dx\,dy, \quad \text{o bien} \quad \iint_R f(x,y)dx\,dy,$$

pudiéndose escribir también dA en lugar de $dx\,dy$.

Ejemplo 1

Sea $f(x,y) = k \in \mathbf{R}$ una función constante en un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$, y p y q dos particiones cualesquiera de $[a,b]$ y $[c,d]$. Será $M_{i,j} = m_{i,j} = k$ para todos los valores de *i,j*, con lo cual $S(p,q) = s(p,q) = k(b-a)(d-c) = \overline{\int_R} f = \underline{\int_R} f$: f es integrable y

$$\int_R f = k(b-a)(d-c)$$

(si $k > 0$, es el volumen del prisma recto de base R y altura k).

Ejemplo 2

Sea ahora la función $f: R \to \boldsymbol{R}$ definida así:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \boldsymbol{Q}^2, \\ 0 & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

con toda facilidad comprobaríamos que, cualesquiera que sean p y q, serán $S(p,q) =$
$= (b-a)(d-c) = \overline{\int_R} f$, y $s(p,q) = 0 = \underline{\int_R} f$; luego f no es integrable en R.

La integral doble como límite

Análogamente al caso de la integral simple, podemos definir la integral doble como límite, mediante el concepto de suma de Riemann.

Dadas como antes dos particiones p y q de los intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$, llamamos *suma de Riemann* correspondiente a las mismas a $\varphi(p,q) = \sum_{i,j} \mu_{i,j}\, A(R_{i,j})$, donde $\mu_{i,j}$ es cualquier número tal que $m_{i,j} \leq \mu_{i,j} \leq M_{i,j}$, y *límite de la misma cuando el diámetro* $d(p,q) = max\{d(p), d(q)\}$ *tiende a 0* a un número real L para el que se verifica que, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si $d(p,q) < \delta$, entonces $|L - \varphi(p,q)| < \varepsilon$; decimos entonces que f es integrable si y sólo si existe este límite, al que llamamos *integral de f en R* .

Se demuestra que ambas definiciones son equivalentes, es decir, tanto las funciones integrables como los valores de sus integrales son los mismos.

Integrabilidad de las funciones continuas

Teorema. Toda función *continua* en un rectángulo es *integrable* en él.

O, más general:

Teorema. Toda función *acotada*, y *continua* excepto en los puntos de un *número finito de curvas de clase* C^1, es *integrable.*

Admitiremos estos teoremas sin demostración.

Integrales iteradas

Sea f una función definida en un rectángulo R como antes. Para cada $x \in [a,b]$ queda definida en $[c,d]$ una función f_x de y, haciendo $f_x(y) = f(x,y)$. Si esta función es integrable, tenemos la integral simple

$$\int_c^d f_x(y)\,dy = \int_c^d f(x,y)\,dy\,,$$

que naturalmente es una función de x definida en $[a,b]$. Si ésta a su vez es integrable, tendremos la integral

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx\,, \text{ o simplemente } \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx\,,$$

a la que llamamos *integral iterada* de f en R.

Cambiando el orden de las variables y con hipótesis análogas definiríamos la otra posible *integral iterada* en R,

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Ejemplo. Tomemos la función $f(x,y) = x^2 + x\,y$ y el rectángulo $R = [0,\,1] \times [-2,\,3]$. Tenemos

$$\int_0^1 \int_{-2}^3 (x^2 + x\,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{x\,y^2}{2} \right]_{y=-2}^{y=3} dx = \int_0^1 \left(5x^2 + \frac{5x}{2} \right) dx = \left[\frac{5x^3}{3} + \frac{5x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{35}{12}\,.$$

Teorema de Fubini

La integral doble se relaciona con las iteradas, de la siguiente forma:

Teorema. Sea f una función integrable sobre un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$, y supongamos que para todo $x \in [a,b]$ la función f_x, definida como antes, es integrable en $[c,d]$; entonces, la función

$$x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,dy$$

es integrable en $[a,b]$, y

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_R f(x,y)\,dA\,.$$

Y lo mismo para la otra integral iterada, suponiendo ahora la integrabilidad de las funciones f_y, definidas para cada $y \in [c,d]$ de manera análoga.

Admitiremos este teorema sin demostración. No obstante, podemos tener una buena intuición geométrica del mismo. Si f es una función integrable positiva, su integral en R, que es el límite, para $d(p,q) \to 0$, de la suma de los volúmenes de $m \cdot n$ prismas

elementales de base $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ y altura $\mu_{i,j}$ (recordemos las sumas de áreas de rectángulos elementales en la definición de la integral simple), es, por definición, la medida del *volumen* cubierto por la gráfica de *f* sobre *R*, es decir, el volumen de

$$\Omega = \{(x,y,z) \,|\, a \le x \le b,\, c \le y \le d,\, 0 \le z \le f(x,y)\} \subset \boldsymbol{R}^3.$$

Por otro lado, para todo valor $x_i \in [a,b]$,

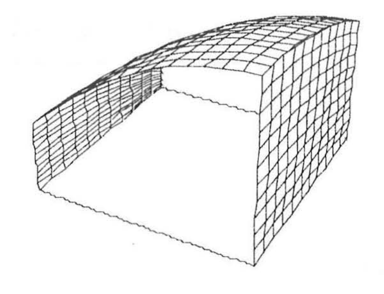
$$\int_c^d f(x_i, y)\, dy$$

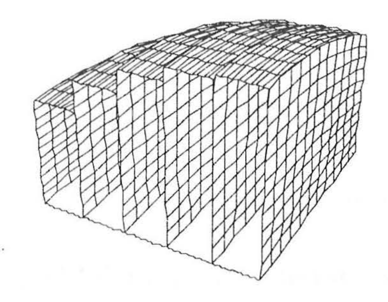
es el área $A(x_i)$ de la intersección de Ω con el plano $x = x_i$. La integral iterada,

$$\int_a^b A(x)\, dx\,;$$

no es entonces otra cosa que el límite de la suma de volúmenes elementales

$$\sum_{i=1}^{n} A(x_i)(x_i - x_{i-1})$$





(cilindros de base dicha intersección, de área $A(x_i)$, y de altura $x_i - x_{i-1}$: ver figura); es decir, es también claramente la medida del volumen de Ω: esto es lo que afirma el llamado *principio de Cavalieri* (Italia, s. XVII), aunque es una idea que se encuentra ya en Arquímedes, s. III a. C. El mismo razonamiento vale para la otra integral iterada.

Naturalmente, una de las cosas que afirma el teorema es que, si *f* es integrable, ambas integrales iteradas son iguales. Comprobémoslo en el ejemplo de más arriba.

$$\int_{-2}^{3}\int_{0}^{1}(x^2 + x\,y)\,dx\,dy = \int_{-2}^{3}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2}\right) dy =$$

$$=\left[\frac{y}{3}+\frac{y^2}{4}\right]_{-2}^{3}=1+\frac{9}{4}+\frac{2}{3}-1=\frac{35}{12},$$

que es, efectivamente, el mismo valor obtenido antes. Esta permutabilidad del orden de las variables puede tener consecuencias importantes en la práctica del cálculo de integrales, como veremos en el siguiente

Ejemplo

Sea $f(x,y)=x\,sen\,xy\,cos\,\pi x$, y $R=[1,2]\times[0,\pi]$.

$$\int_R f(x,y)\,dA=\int_1^2\int_0^{\pi} x\,sen\,xy\,cos\,\pi x\,dy\,dx=\int_0^{\pi}\int_1^2 x\,sen\,xy\,cos\,\pi x\,dy\,dx,$$

integrales iteradas iguales según el teorema. Pero la primera se calcula fácilmente:

$$\int_1^2\int_0^{\pi} x\,sen\,xy\,cos\,\pi x\,dy\,dx=\int_1^2\left[-cos\,xy\,cos\,\pi x\right]_{y=0}^{y=\pi}dx=\int_1^2\left(-cos^2\pi x+cos\,\pi x\right)dx=$$

$$=\int_1^2\left(-\frac{1+cos\,2\pi x}{2}+cos\,\pi x\right)dx=-\frac{1}{2};$$

mientras que en la segunda llegamos, tras aplicar identidades trigonométricas e integrar por partes, a

$$\int_1^2 x\,sen\,xy\,cos\,\pi x\,dx=-2\pi\frac{2\,cos\,2y+cos\,y}{y^2-\pi^2}+\frac{\left(y^2+\pi^2\right)\left(sen\,2y+sen\,y\right)}{\left(y^2-\pi^2\right)^2},$$

y ¿cómo seguir?

Propiedades de la integral doble en un rectángulo

A partir del teorema de Fubini se extienden inmediatamente a la integral doble algunas propiedades básicas de la integral simple.

1 - *Aditividad respecto del dominio.* Si $R=R_1\cup R_2$, siendo R_1 y R_2 dos rectángulos cuya intersección es *de área nula* (es decir, sólo tienen un lado común), y f es una función definida e integrable en R, entonces f es integrable en R_1 y en R_2, y se verifica que

$$\int_R f\,dA=\int_{R_1} f\,dA+\int_{R_2} f\,dA.$$

2 - *Linealidad.* Si f y g son funciones integrables en un rectángulo R y k es un número real, entonces las funciónes $f+g$ y kf lo son también, verificándose que

$$\int_R (f+g)\,dA = \int_R f\,dA + \int_R g\,dA\,,$$

$$\int_R k f\,dA = k\int_R f\,dA\,.$$

3 - Si f es integrable y positiva en R, entonces

$$\int_R f\,dA \geq 0\,.$$

Como consecuencia de 2 y 3:

4 - *Orden.* Si f y g son integrables en R y $f \leq g$, entonces

$$\int_R f\,dA \leq \int_R g\,dA$$

(puesto que $0 \leq \int_R (f-g)\,dA = \int_R f\,dA - \int_R f\,dA$).

Como corolario de lo anterior, y recordando que la integral de una constante en R es su producto por el área de R, resulta:

5 - *Teorema de la media.* Si f es integrable en R y son α y β respectivament su supremo y su ínfimo, entonces existe un número real $\mu \in [\beta,\, \alpha]$, llamado *media integral* (o *valor medio*) de f en R, tal que

$$\int_R f\,dA = \mu(b-a)(d-c) = \mu\, A(R)\,;$$

y si f es continua, μ será un valor de la función, es decir,

$$\int_R f\,dA = f(\xi,\eta)\, A(R)$$

para algún $(\xi,\eta) \in R$.

Integral doble en un dominio no rectangular: definición y propiedades

Hasta ahora hemos hablado de integrales en rectángulos, pero necesitamos ampliar el concepto a dominios más generales. Y lo haremos limitándonos en lo que sigue al caso de funciones continuas, quizá con la salvedad indicada en el segundo teorema de la página 3.

Sea D un dominio del plano limitado por una curva C de clase C^1 e incluido en un rectángulo R, y sea f una función continua en D. Definimos en R otra función, f_D, de la siguiente forma:

$$f_D(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y)\in D, \\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

La función f_D es obviamente continua excepto en una curva de clase C^1, luego es integrable en R. Entonces, por **definición**:

$$\int_D f\,dA=\int_R f_D\,dA.$$

Las propiedades de la integral sobre un rectángulo que veíamos más arriba: *aditividad respecto del dominio*, *linealidad*, *positividad*, *orden*, así como el *teorema de la media*, se extienden de manera natural a la integral doble sobre estos dominios más generales. Y, si f es positiva, su integral admitirá la misma interpretación geométrica como *volumen* del sólido

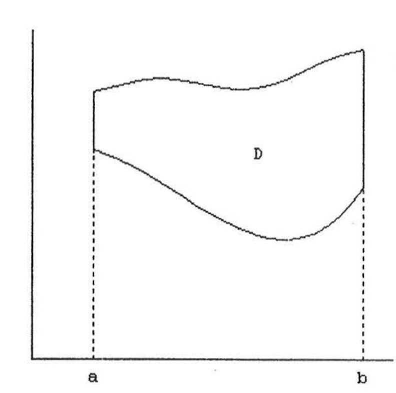
$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\, 0\le z\le f(x,y)\}.$$

Y tomando $f(x,y)=1$, será también

$$\int_D dA=A(D),$$

es decir, la integral doble será la medida del *área* del dominio D.

Dominios elementales del plano



Llamaremos:

región elemental de tipo I a una parte del plano que pueda definirse así:

$$D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\, \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\},$$

donde φ_1 y φ_2 son funciones de clase C^1 en $[a,b]$, la primera mayorada por la segunda;

región elemental de tipo II a una que pueda definirse como

$$D=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d,\, \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\},$$

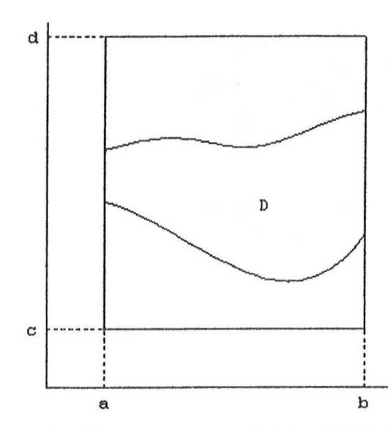
con las mismas condiciones para ψ_1 y ψ_2;

región elemental de tipo III a una región que pueda definirse lo mismo como de tipo I que como de tipo II; y finalmente

dominio elemental a una parte del plano que sea *unión finita* de regiones elementales de cualesquiera de los tres tipos *disjuntas dos a dos*, o bien *con intersecciones de área nula* (formadas sólo por puntos frontera).

Integrales doble e iteradas en dominios elementales

Sea f una función continua en una región elemental D de tipo I, y c y d cotas, respectivamente inferior y superior, de φ_1 y de φ_2. Si es R el rectángulo $[a,b]\times[c,d]$ y definimos en él la función f_D como antes, será:



$$\int_D f\,dA = \int_R f_D\,dA = \int_a^b\int_c^d f_D\,dy\,dx = \int_a^b\left(\int_c^{\varphi_1(x)} f_D\,dy + \right.$$

$$\left. + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_D\,dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} f_D\,dy\right)dx = \int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\,dy\,dx,$$

ya que las integrales primera y tercera dentro del paréntesis son nulas, por serlo f_D en esos intervalos, y en la segunda f_D y f son idénticas.

Análogamente, si D es de tipo II, se verificará que

$$\int_D f\,dA = \int_c^d\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f\,dx\,dy,$$

con demostración idéntica.

Si D es de tipo III, la integral de f podrá expresarse como integral iterada de dos formas distintas:

$$\int_D f\,dA = \int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\,dy\,dx = \int_c^d\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f\,dx\,dy.$$

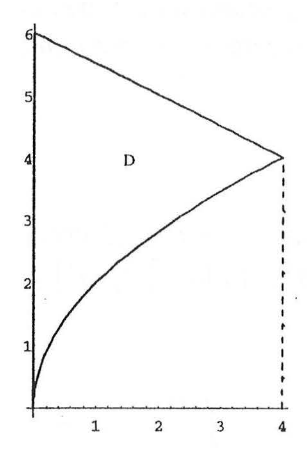
Y finalmente, si se trata de un dominio elemental $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, con las regiones D_i dos a dos disjuntas o con intersecciones de área nula,

$$\int_D f\,dA = \sum_{i=1}^{n}\int_{D_i} f\,dA.$$

Ejemplo 1

Sea $f(x,y) = xy$ y D la región del plano encerrada por las curvas

$$y = 6 - \frac{x}{2},\quad y = 2\sqrt{x},\quad x = 0.$$



La intersección de las dos primeras tiene de abscisa $x = 4$, y entre este valor y $x = 0$ es $6 - \frac{x}{2} \geq 2\sqrt{x}$, luego

$$D = \left\{ (x, y) \middle| 0 \leq x \leq 4, 2\sqrt{x} \leq y \leq 6 - \frac{x}{2} \right\},$$

con lo que

$$\int_D f \, dA = \int_0^4 \int_{2\sqrt{x}}^{6-\frac{x}{2}} xy \, dy \, dx = \int_0^4 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=2\sqrt{x}}^{y=6-\frac{x}{2}} dx =$$

$$= \int_0^4 \left(18x - 5x^2 + \frac{x^3}{8} \right) = \left[9x^2 - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^4}{32} \right]_0^4 = 144 - \frac{320}{3} + 8 = \frac{136}{3}.$$

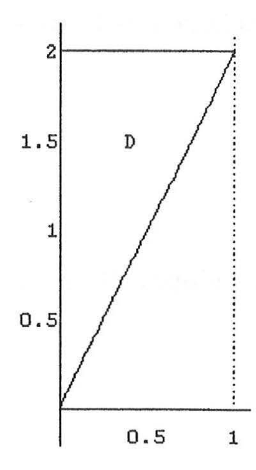
Ejemplo 2

Sean ahora $f(x, y) = e^{y^2}$ y D el triángulo determinado por las rectas

$$x = 0, \; y = 2 \;\text{ e }\; y = 2x,$$

es decir,

$$D = \{ (x, y) | 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 2 \}.$$



La integral será

$$\int_D f \, dA = \int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} \, dy \, dx,$$

que no podemos resolver por no existir una primitiva elemental de e^{y^2}.

Pero D es una región elemental de tipo III, que podemos escribir también así:

$$D = \left\{ (x, y) \middle| 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \frac{y}{2} \right\};$$

con lo que

$$\int_D f \, dA = \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} e^{y^2} \, dx \, dy = \int_0^2 \left[x \, e^{y^2} \right]_{x=0}^{x=\frac{y}{2}} dy = \int_0^2 \frac{y}{2} e^{y^2} \, dy = \left[\frac{e^{y^2}}{4} \right]_0^2 = \frac{e^4 - 1}{4},$$

lo que ilustra la importancia práctica que puede tener el orden de las variables en la integración iterada.

Geometría de las aplicaciones de R^2 en R^2

Para abordar el importante tema del cambio de variables en una integral doble tenemos que hablar de aplicaciones del plano real en sí mismo, y de cómo éstas afectan al área de un dominio.

Sabemos que, si Φ es una aplicación *lineal* e *inversible* (*isomorfismo*) de R^2 en R^2,

$$\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

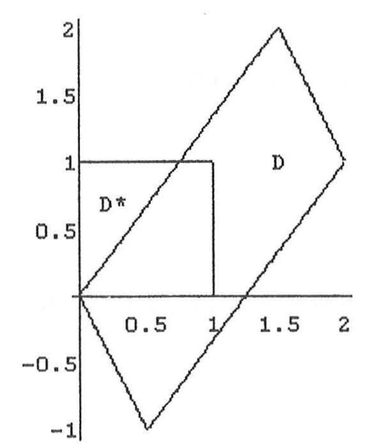
es una matriz regular, entonces Φ transforma rectas en rectas y conserva el paralelismo, y además el área de un paralelogramo se ve multiplicada, en su transformado, por el valor absoluto del determinante de A.

Sea por ejemplo la aplicación

$$\begin{cases} x = \dfrac{u}{2} + \dfrac{3v}{2} \\ y = -u + 2v \ . \end{cases}$$

Tenemos:

$$|det\, A| = \left| det\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{5}{2}.$$



Sea D^* el cuadrado $[0, 1]\times[0, 1]$, de área 1; como

$$\Phi(0, 0) = (0, 0), \quad \Phi(1, 0) = \left(\frac{1}{2}, -1\right),$$

$$\Phi(0, 1) = \left(\frac{3}{2}, 2\right), \quad \Phi(1, 1) = (2, 1),$$

D^* se transforma en el paralelogramo D de vértices $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ y $(2, 1)$, cuya área es $\frac{5}{2}$, como se comprueba sin dificultad.

Si la aplicación Φ no es lineal, pero sí de clase C^1 e inversible en un dominio D, lo anterior no es inmediatamente aplicable. Pero sabemos que existe entonces en cada punto, *localmente*, una *buena* aproximación lineal, a la que llamamos *diferencial de* Φ, cuya matriz es la de derivadas de Φ o *matriz jacobiana*, y cuyo determinante, el *jacobiano*, no se anula por ser Φ biyectiva. Naturalmente, este determinante ahora no es constante, depende del punto. Pero *localmente* nos permite relacionar áreas de *partes muy pequeñas* del plano con sus transformadas por Φ.

Veamos un ejemplo. Sea la aplicación Φ definida así:

$$\begin{cases} x = u^2 + uv \\ y = v^2 - u \end{cases}$$

cuyo jacobiano es, en cada punto,

$$J\frac{(x,y)}{(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u+v & u \\ -1 & 2v \end{vmatrix} = 4uv + 2v^2 + u .$$

Consideremos como antes el cuadrado

$$D^* = [0,1]\times[0,1];$$

su área es $A(D^*) = 1$, y el valor del jacobiano en un punto interior, por ejemplo el centro,

$$J\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2,$$

con lo que

$$J\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot A(D) = 2 .$$

Hallemos ahora el transformado $D = \Phi(D^*)$. Los vértices se transforman en

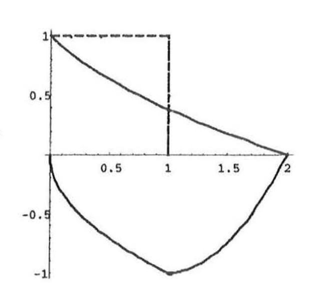
$$\Phi(0,0) = (0,0), \quad \Phi(1,0) = (1,-1),$$
$$\Phi(1,1) = (2,0), \quad \Phi(0,1) = (0,1);$$

pero ahora las rectas ya no se transforman en rectas, sino que el lado $v = 0$, por ejemplo, se transforma en

$$\begin{cases} x = u^2 \\ y = -u \end{cases}$$

es decir, en la parábola

$$y = -\sqrt{x},$$



y análogamente los otros tres lados, según el cuadro

$$u = 1 \mapsto y = x^2 - 2$$
$$v = 1 \mapsto y = \frac{3 - \sqrt{1+4x}}{2}$$
$$u = 0 \mapsto x = 0$$

con lo cual D es como indica la figura; su área es

$$A(D) = \int_0^2 \frac{3-\sqrt{1+4x}}{2}\,dx + \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_1^2 \left(x^2 - 2x\right)dx =$$

$$= \left[\frac{3x}{2} - \frac{(1+4x)^{\frac{3}{2}}}{12}\right]_0^2 + \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_1^2 =$$

$$= 3 - \frac{27}{12} + \frac{1}{12} + \frac{2}{3} - \left(\frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{13}{6} = 2{,}1666\ldots;$$

la aproximación es evidente, y sería mayor para dominios D^* más pequeños.

Esto sugiere lo siguiente: puesto que la integral es el límite de la suma de áreas muy pequeñas del plano, multiplicadas por un valor de la función en un punto de ellas,

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = lim \sum_{i,j} f\left(x_i, y_j\right) \Delta x_i \Delta y_j,$$

¿no habría quizá que sustituir, al cambiar de variables mediante la aplicación

$$\Phi : D^* \to D,$$

el factor $\Delta x_i \Delta y_j$ por $\left|J_\Phi(u_k, v_l)\right| \Delta u_k \Delta v_l$? Es decir, llamando

$$f^*(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right),$$

¿no será

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = lim \sum_{k,l} f^*(u_k, v_l)\left|J_\Phi(u_k,v_l)\right| \Delta u_k \Delta v_l = \int_{D^*} f^*(u,v)\left|J_\Phi\right| du\,dv?$$

Tomemos un ejemplo sencillo. Sea D el círculo $x^2 + y^2 \le a^2$; sabemos que su área es

$$\int_D dA = \pi a^2 .$$

Hagamos en esta integral un cambio a coordenadas polares,

$$(x, y) = \Phi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \,sen\,\theta),$$

cuyo jacobiano es

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r \,sen\,\theta \\ sen\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r .$$

Evidentemente

$$D = \Phi(D^*), \quad \text{siendo} \quad D^* = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le a, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

(Φ es de clase C^1 e inversible en el *interior* del rectángulo D^*, donde r no se anula), con lo que tendremos

$$\int_{D^*} r\,dr\,d\theta = \int_0^a \int_0^{2\pi} r\,dr\,d\theta = 2\pi \int_0^a r\,dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^a = \pi a^2 ,$$

es decir, en este caso sí se verifica la conjetura.

Pues bien, ello no es casual, como afirma el teorema siguiente (del que todo lo dicho *no* es, desde luego, una *demostración*, pero sí una aproximación que lo hace intuitivamente más natural).

La fórmula del cambio de variables

Teorema. Sea D un dominio elemental del plano, y sean $\Phi: D^* \to D$ una biyección de clase C^1 y f una función continua en D (pudiendo no verificarse estas propiedades de Φ y de f en un número finito de curvas C^1). Entonces

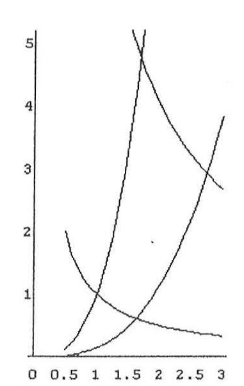
$$\int_{D^*} f \circ \Phi \cdot |J_\Phi| = \int_D f ;$$

o dicho de otro modo,

$$\int_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| J \frac{(x, y)}{(u, v)} \right| du\,dv = \int_D f(x, y)\,dx\,dy .$$

Ejemplo 1

Vamos a calcular el área del dominio D definido por las curvas



$$y = x^3, \quad 7y = x^3, \quad xy = 1, \quad xy = 8$$

en el primer cuadrante.

Tomaremos como nuevas variables

$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{x^3} \\ v = xy, \end{cases}$$

con lo cual el dominio se convierte en el rectángulo

$$D^* = \left\{ (u,v) \middle| \frac{1}{7} \le u \le 1, 1 \le v \le 8 \right\},$$

y el jacobiano $J\dfrac{(x,y)}{(u,v)}$ será el inverso de

$$J\frac{(u,v)}{(x,y)} = \begin{vmatrix} -\dfrac{3y}{x^4} & \dfrac{1}{x^3} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{4y}{x^3},$$

es decir, en valor absoluto y puesto que u es positiva,

$$\left| J\frac{(x,y)}{(u,v)} \right| = \left| -\frac{x^3}{4y} \right| = \frac{1}{4u},$$

con lo que resulta finalmente

$$A(D) = \int_{\frac{1}{7}}^{1} \int_{1}^{8} \frac{1}{4u} dv\, du = 7\left[\frac{\log u}{4} \right]_{\frac{1}{7}}^{1} = \frac{7 \log 7}{4} \cong 3{,}4053.$$

Comprobémoslo calculando el área sin cambiar de variables. Las intersecciones son:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}, x_1 = 1; \quad \begin{cases} y = \dfrac{x^3}{7} \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}, x_2 = \sqrt[4]{7}; \quad \begin{cases} y = x^3 \\ y = \dfrac{8}{x} \end{cases}, x_3 = \sqrt[4]{8}; \quad \begin{cases} y = \dfrac{x^3}{7} \\ y = \dfrac{8}{x} \end{cases}, x_4 = \sqrt[4]{56};$$

y el área:

$$A(D) = \int_{x_1}^{x_2} \left(x^3 - \frac{1}{x} \right) dx + \int_{x_2}^{x_3} \left(x^3 - \frac{x^3}{7} \right) dx + \int_{x_3}^{x_4} \left(\frac{8}{x} - \frac{x^3}{7} \right) dx =$$

$$=\frac{7-1}{4}-\frac{log\,7}{4}+\frac{6}{7}\frac{8-7}{4}+8\frac{log\,56-log\,8}{4}-\frac{56-8}{28}=$$

$$=\left(-\frac{1}{4}+2\right)log\,7+\frac{42+6-48}{28}=\frac{7\,log\,7}{4}.$$

Ejemplo 2

Sea D de nuevo el círculo $x^2+y^2\leq a^2$, y $f(x,y)=x^2y^2$. Calculemos la integral de f en D mediante un cambio, de nuevo, a coordenadas polares. Tenemos:

$$f^*(r,\theta)=f(\Phi(r,\theta))=r^4\cos^2\theta\,sen^2\,\theta,$$

con lo que

$$\int_D f(x,y)\,dA=\int_0^a\int_0^{2\pi}r^5\cos^2\theta\,sen^2\,\theta\,d\theta\,dr=\int_0^a\int_0^{2\pi}r^5\frac{sen^2\,2\theta}{4}d\theta\,dr=$$

$$=\int_0^a\int_0^{2\pi}r^5\frac{1-\cos 4\theta}{8}d\theta\,dr=\int_0^a r^5\left[\frac{\theta}{8}-\frac{sen\,4\theta}{32}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}dr=\frac{\pi}{4}\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^a=\frac{\pi a^6}{24}.$$

Aplicaciones de la integral doble

La integral doble admite aplicaciones geométricas y físicas importantes, como son la definición, cálculo y propiedades de algunos conceptos y magnitudes básicos, tales como *volúmenes, masas, centros de gravedad* y *momentos de inercia*. En lo que resta del tema se hablará de todo ello.

Volúmenes

Ya hemos visto que la integral de una función positiva f en un dominio D mide un volumen:

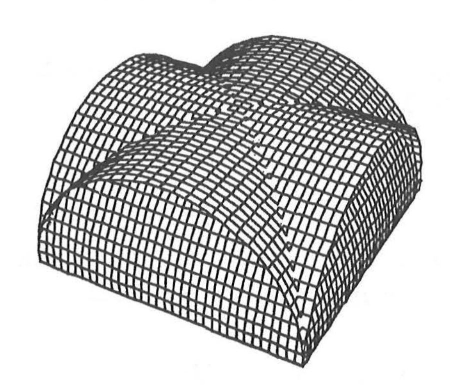
$$\int_D f\,dA=V(\Omega),$$

donde

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\,0\leq z\leq f(x,y)\}.$$

Ejemplo 1

Sabemos que, al cortarse ortogonalmente, dos bóvedas de medio cañón de la misma luz engendran dos bóvedas de esquina, una formada por la hoja superior, *bóveda de arista*, y otra por la inferior, *bóveda de rincón de claustro* (ver figura).



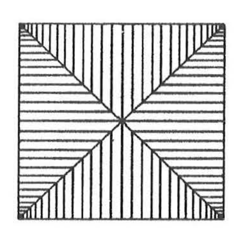
Calculemos el volumen cubierto por una de ellas, la de arista por ejemplo, suponiendo que la luz de las dos de medio cañón sea $2l$ metros. Tomando ejes de coordenadas de la manera obvia, las ecuaciones de los dos cilindros serán, respectivamente,

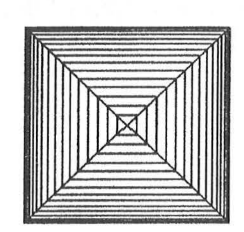
$$x^2+z^2=l^2\,,\quad y^2+z^2=l^2\,,$$

o bien

$$z=\sqrt{l^2-x^2}\,,\quad z=\sqrt{l^2-y^2}\,,$$

y un octavo de la bóveda de arista quedará definido, por ejemplo (ver plantas), por el cilindro $z=\sqrt{l^2-x^2}$ sobre el triángulo D encerrado, en el plano OXY, por las rectas



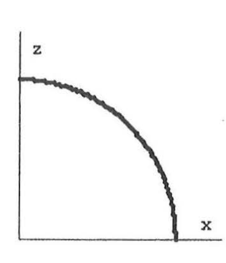


$$y=x\,,\ y=l\,,\ x=0\,,$$

es decir, el volumen total cubierto por la bóveda será

$$V=8\int_D z\,dA\,,$$

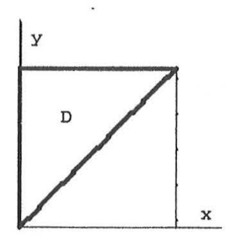
integral que vamos a calcular.



$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le l,\ x\le y\le l\}\,,\quad z=\sqrt{l^2-x^2}\,;$$

$$V=8\int_0^l\int_x^l\sqrt{l^2-x^2}\,dy\,dx=8\int_0^l(l-x)\sqrt{l^2-x^2}\,dx;$$

$$x=l\,sen\,t,\ \ dx=l\cos t\,dt,$$



$$\sqrt{l^2-x^2}=l\cos t;\ \ x=0\Leftrightarrow t=0,\ \ x=l\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2};$$

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}l^3(1-sen\,t)\cos^2 t\,dt=$$

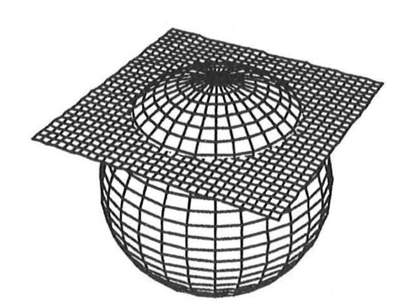
$$=8l^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}-\cos^2 t\ sen\,t\right)dt=$$

$$=8l^3\left[\frac{t}{2}+\frac{sen\,2t}{4}+\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(2\pi-\frac{8}{3}\right)l^3\ \mathrm{m}^3\cong 3{,}61652\,l^3\ \mathrm{m}^3,$$

lo que supone el 90,41% del correspondiente a la cubierta plana de igual altura, $4l^3$ m^3.

De forma semejante, cambiando, bien la superficie, bien el dominio de integración, puede calcularse el volumen cubierto por la bóveda de rincón de claustro.

Ejemplo 2



Calculemos ahora el volumen del menor de los segmentos esféricos definidos por la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2l^2$$

y el plano

$$z = l.$$

La proyección de la intersección de ambos sobre el plano *OXY* será la circunferencia

$$x^2 + y^2 = l^2,$$

y el volumen buscado

$$V = \int_D z\,dA,$$

donde

$$z = \sqrt{2l^2 - x^2 - y^2} - l, \quad D = \left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 \le l^2\right\}.$$

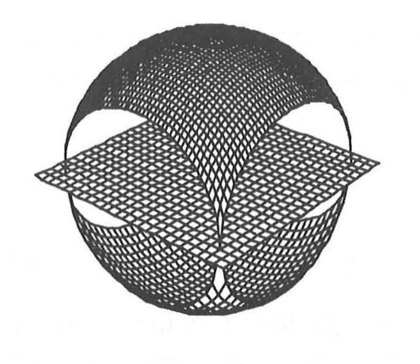
Cambiando a coordenadas polares, resulta

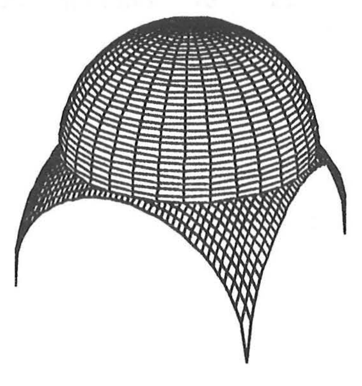
$$z = \sqrt{2l^2 - r^2} - l, \quad D^* = \left\{(r,\theta) \middle| 0 \le r \le l,\ 0 \le \theta \le 2\pi\right\},$$

$$V = \int_0^l \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2l^2 - r^2} - l\right) r\,d\theta\,dr = 2\pi \int_0^l \left(\left(2l^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}} r - l\,r\right) dr =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{\left(2l^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{l\,r^2}{2} \right]_0^l = 2\pi \left(-\frac{l^3}{3} - \frac{l^3}{2} + \frac{2^{\frac{3}{2}} l^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 5}{3} \pi l^3.$$





A partir de este volumen, y recordando que el de una esfera de radio R es $\frac{4}{3}\pi R^3$, es inmediato calcular el cubierto por una *bóveda baída*, definida por una semiesfera sobre un cuadrado de $2l$ metros de lado, es decir, apoyada en cuatro arcos de luz $2l$ m. (¿cómo se haría? se sugiere comenzar considerando la esfera completa, tal como representa la figura; para comprobación del que aborde el cálculo, diremos que el volumen pedido equivale al 80,40% del encerrado por una cubierta plana de iguales planta y altura). Y el siguiente paso sería calcular el de una bóveda semiesférica *sobre pechinas esféricas.*

Supongamos ahora que queremos calcular el volumen de un sólido, Ω, definido por dos superficies dadas explícitamente por dos funciones continuas f y g,

$$\begin{cases} z_1 = f(x,y) \\ z_2 = g(x,y), \end{cases}$$

que se cortan según una curva regular C, cuya proyección sobre el plano OXY sea una *curva plana simple* C_1 que encerrará un dominio D. Es claro que el volumen definido por dichas superficies será

$$V(\Omega) = \int_D |f - g|\, dA$$

(de forma análoga a lo que ocurría, en la integral simple, con las áreas de figuras planas encerradas por dos curvas).

Ejemplo 1

Supongamos que queremos calcular el volumen encerrado por el paraboloide

$$z = x^2 + 3y^2$$

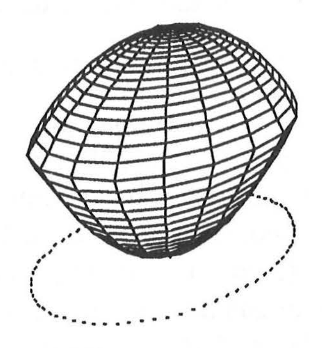
y el elipsoide

$$2x^2 + 6y^2 + z^2 = 3$$

en el subespacio $z \geq 0$ (ver figura).

La intersección de ambas cuádricas estará en el plano dado por la ecuación

$$2z + z^2 = 3, \quad \text{o bien} \quad (z-1)(z+3) = 0,$$



con la condición $z \geq 0$, es decir, $z = 1$, que llevado a la ecuación de cualquiera de las cuádricas nos da

$$x^2 + 3y^2 = 1,$$

elipse de semiejes 1 y $\frac{1}{\sqrt{3}}$ que define, en el plano *OXY*, el dominio *D* de integración. Y como en dicho dominio el elipsoide está *por encima* del paraboloide, será finalmente:

$$V = \int_D \left(\sqrt{3 - 2x^2 - 6y^2} - x^2 - 3y^2\right) dA.$$

Para resolver esta integral haremos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} r\, sen\,\theta \end{cases}$$

(parecido al cambio a *coordenadas polares*, pero que transforma rectángulos en *elipses* y no en círculos como aquél; se habla por ello, a veces, de *coordenadas elípticas*), cuyo jacobiano es

$$J\frac{(x,y)}{(r,\theta)} = \frac{r}{\sqrt{3}};$$

con él, el dominio y las dos superficies se convierten respectivamente en

$$D^* = \{(r,\theta) \,|\, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \quad z = r^2 \quad \text{y} \quad z = \sqrt{3 - 2r^2},$$

resultando

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{3 - 2r^2} - r^2\right) \frac{r}{\sqrt{3}} d\theta\, dr = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{-(3 - 2r^2)^{\frac{3}{2}}}{6} - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{3^{\frac{3}{2}}}{6} \right) = \frac{(6\sqrt{3} - 5)\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Si la intersección de las superficies no fuese una curva simple, podría ocurrir que en unas partes del dominio una superficie estuviese *por encima* de la otra y en otras *por debajo*, con lo cual habría que calcular varias integrales cambiando el signo, etc.

Pero el cálculo de volúmenes puede abordarse también mediante la integral triple, por lo que aquí no diremos más de ello.

Masas

Si en un dominio D del plano tenemos una función positiva, podemos interpretarla siempre como una *densidad*, medida naturalmente en unidades de masa por unidad de superficie. La integral medirá entonces la *masa* del dominio:

$$M(D) = \int_D m(x,y)\, dA,$$

donde m es la función densidad a la que nos referíamos.

Cualquiera de los casos de integrales de funciones positivas que hemos visto podría servir de ejemplo (en el siguiente apartado veremos uno específico).

Centros de gravedad

Dado un sistema de n masas $m_1, m_2, \dots, m_n$, situadas sobre una recta en los puntos de abscisas respectivas $x_1, x_2, \dots, x_n$, sabemos que se llama *centro de gravedad*, o *baricentro*, del sistema al punto respecto del cual el *momento* (*estático* o de primer orden) del sistema es nulo, es decir, el punto de abscisa $\bar{x}$ tal que $\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})m_k = 0$, de donde resulta

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k\, m_k}{M},$$

donde $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ es la masa total.

Esto se generaliza al caso de dos dimensiones de la forma obvia, y a un *continuo* de masas, es decir, a un dominio D del plano con una función de densidad $m\colon D \to \boldsymbol{R}_+$, mediante la sustitución de sumas por integrales. En resumen, las coordenadas del centro de gravedad de D serán

$$\bar{x} = \frac{\int_D x\, m(x,y)\, dA}{\int_D m(x,y)\, dA} = \frac{\int_D x\, m(x,y)\, dA}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\int_D y\, m(x,y)\, dA}{M}.$$

Si la densidad fuese constante, las expresiones se reducirían a

$$\bar{x} = \frac{\int_D x\, dA}{A}, \quad \bar{y} = \frac{\int_D y\, dA}{A},$$

y estaríamos ante un concepto puramente geométrico.

Ejemplo 1

Calculemos el c.d.g. de un semicírculo de radio a. Tomando el centro del círculo como origen de coordenadas y el diámetro frontera como eje OX, será $\bar{x}=0$ por simetría, y con un cambio a polares,

$$\bar{y}=\frac{\int_0^a\int_0^\pi r^2\, sen\,\theta\, d\theta\, dr}{\frac{\pi a^2}{2}}=\frac{2\int_0^a r^2 2\,dr}{\pi a^2}=\frac{4a}{3\pi}.$$

Es decir, el centro de gravedad es el punto situado sobre el eje de simetría a una distancia $\frac{4a}{3\pi}\cong 0{,}4244\,a$ del centro.

Ejemplo 2

Calculemos ahora el c.d.g. del mismo semicírculo pero con densidad igual, respecto de la misma referencia, a $k(a-y)$, donde k es una constante dada.

Al no variar la densidad con la coordenada x la simetría se conserva, con lo que seguirá siendo $\bar{x}=0$. Calculemos, pues, primero la masa y luego la coordenada $\bar{y}$:

$$M=\int_0^a\int_0^\pi k(a-r\,sen\,\theta)\,r\,d\theta\,dr=\int_0^a kr\left[a\theta+r\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}dr=$$

$$=\int_0^a kr(\pi a-2r)\,dr=k\left[\frac{\pi a r^2}{2}-\frac{2r^3}{3}\right]_0^a=k\frac{3\pi-4}{6}a^3;$$

$$M\,\bar{y}=\int_0^a\int_0^\pi k(a-r\,sen\,\theta)\,r^2\,sen\,\theta\,d\theta\,dr=\int_0^a\int_0^\pi kr^2\Big(a\,sen\,\theta-$$

$$-r\frac{1-\cos 2\theta}{2}\Big)d\theta\,dr=\int_0^a kr^2\left[-a\cos\theta-\frac{r\theta}{2}+\frac{r\,sen\,2\theta}{4}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}dr=$$

$$=\int_0^a kr^2\left(2a-\frac{\pi r}{2}\right)dr=k\left[\frac{2ar^3}{3}-\frac{\pi r^4}{8}\right]_0^a=k\frac{16-3\pi}{24}a^4;$$

$$\bar{y}=k\frac{16-3\pi}{24}a^4\frac{6}{k(3\pi-4)a^3}=\frac{16-3\pi}{4(3\pi-4)}a\cong 0{,}3030\,a\,.$$

Momentos de inercia

Es sabido que el *momento de inercia* (o momento de segundo orden) de un sistema de n puntos, de masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respecto de un eje e (magnitud física que desempeña ante un par de fuerzas el mismo papel que la *masa* ante una fuerza), es $I_e = \sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2} m_i$, donde d_i es la distancia de la masa m_i al eje e. Esto se extiende a un dominio D del plano, de densidad $m: D \to \boldsymbol{R}_+$, mediante la integración.

Si tomamos el eje e como uno de los ejes coordenados y es $m(x, y)$ la densidad en cada punto, el momento será

$$I_x = \int_D m(x,y)\, y^2\, dA,$$

o bien

$$I_y = \int_D m(x,y)\, x^2\, dA,$$

según que e sea el eje de abscisas o el de ordenadas.

También se habla de momento de inercia respecto de un *punto*, o momento *polar*, que equivaldría al momento respecto de un eje perpendicular al plano. Si el punto es el origen, evidentemente

$$I_O = I_x + I_y.$$

Ejemplo 1

Calculemos el momento de inercia de un rectángulo, de lados a y b y densidad constante m, respecto de su base media paralela al lado de longitud a:

$$I_x = \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} m\, y^2\, dy\, dx = ma\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = m\frac{ab^3}{12} = \frac{b^2 M}{12}.$$

Ejemplo 2

Sea ahora el semicírculo del ejemplo 2 de la página 21. Calculemos el momento de inercia respecto del eje de simetría:

$$I_y = \int_0^a \int_0^\pi k\,(a - r\,sen\,\theta)\, r^2 \cos^2\theta\, r\, d\theta\, dr = k\int_0^a \int_0^\pi \left(ar^3\,\frac{1+\cos 2\theta}{2} - \right.$$

$$\left. - r^4\, sen\,\theta \cos^2\theta\right) d\theta\, dr = k\int_0^a \left[ar^3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{sen\,2\theta}{4}\right) + r^4\,\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} dr =$$

$$= k\int_0^a \left(\frac{\pi a r^3}{2} - \frac{2r^4}{3} \right) dr = k\left(\frac{\pi}{8} - \frac{2}{15} \right) a^5 .$$

El siguiente teorema enuncia una sencilla propiedad relativa a los momentos de inercia respecto de dos ejes paralelos.

Teorema. El momento de inercia respecto de un eje cualquiera es igual al momento respecto del eje paralelo que pasa por el centro de gravedad más el producto de la masa por el cuadrado de la distancia entre ambos ejes.

Demostración

Basta ver que, si el centro de gravedad es el origen de coordenadas y el eje dado la recta $y = d$, es

$$(y - d)^2 = y^2 - 2dy + d^2 ,$$

es decir,

$$I_e = \int_D (y - d)^2 \, m(x, y)\, dA = I_x - 2d \int_D y\, m(x, y)\, dA + Md^2 = I_x + Md^2 ,$$

ya que la integral del segundo miembro es el momento estático respecto de un eje que pasa por el centro de gravedad, y por lo tanto es nula. ■

Por ejemplo, ¿cuál sería el momento de inercia del rectángulo del ejemplo 1 de la página 23 respecto de su base? Según el teorema,

$$I_a = m\frac{ab^3}{12} + abm\left(\frac{b}{2} \right)^2 = m\frac{ab^3}{3} = \frac{b^2 M}{3} .$$

II - Integral triple

Integral triple en un rectángulo

Todo lo que se dijo para introducir el concepto de integral doble sirve, con las pequeñas adaptaciones necesarias para pasar de dos a tres variables, como introducción de la integral triple. Ahora consideraremos una función acotada

$$f: R \to \boldsymbol{R},$$

donde R es un *rectángulo* (paralelepípedo rectángulo) en $\boldsymbol{R}^3$, es decir,

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3],$$

y sendas particiones p, q y r de los tres intervalos $[a_i, b_i]$, que dividirán R en $m \cdot n \cdot p$ rectángulos elementales $R_{i,j,k}$, en cada uno de los cuales f tendrá un ínfimo y un supremo, $M_{i,j,k}$ y $m_{i,j,k}$ respectivamente, con los que definiremos las sumas $S(p,q,r) = $ $= \sum_{i,j,k} M_{i,j,k} V(R_{i,j,k})$ y $s(p,q,r) = \sum_{i,j,k} m_{i,j,k} V(R_{i,j,k})$, donde $V(R_{i,j,k})$ es el volumen del rectángulo elemental $R_{i,j,k}$, etc., resultando la integral como punto frontera entre el conjunto de las primeras y el de las segundas, si es que existe, que será la condición para que f sea integrable.

También la definición como límite es análoga ahora, a partir del concepto de *suma de Riemann*, $\varphi(p,q,r) = \sum_{i,j,k} \mu_{i,j,k} V(R_{i,j,k})$, donde $\mu_{i,j,k}$ es cualquier número real tal que $m_{i,j,k} \le \mu_{i,j,k} \le M_{i,j,k}$, y de su *límite cuando* $d(p,q,r) = max\{d(p), d(q), d(r)\}$ *tiende a 0*. Ambas definiciones son equivalentes.

Las notaciones para la integral triple son

$$\int_R f, \quad \int_R f\,dx\,dy\,dz, \quad \int_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

o bien escribiendo dV en lugar de $dx\,dy\,dz$.

Integrabilidad de las funciones continuas

Teorema. Toda función definida en un rectángulo R, *acotada*, y *continua* excepto en los puntos de un *número finito de superficies de clase* C^1, es *integrable* en R.

Integrales iteradas

Serán ahora de la forma

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx\,,$$

supuesta la integrabilidad de todas las funciones que se van integrando sucesivamente (las $f_{x\,y}$ definidas por $f_{x,y}(z)=f(x,y,z)$, $z\in[a_3,b_3]$, y las f_x definidas por $f_x(y)=$ $=\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz$, $y\in[a_2,b_2]$), condición que se cumplirá si f es continua, pues ello implicará la continuidad de todas esas funciones.

Naturalmente existirán hasta *seis* integrales iteradas distintas, pues seis son las permutaciones posibles de las tres variables.

Teorema de Fubini

Afirma, igual que en la integral doble y con análogas condiciones, la igualdad de la integral triple y de las seis integrales iteradas.

Ejemplo

Sea f la función $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{y}+z$, y $R\subset \boldsymbol{R}^3$ el rectángulo $[0,2]\times[1,4]\times[-1,1]$. Será

$$\int_R f(x,y,z)dV=\int_0^2\int_{-1}^1\int_1^4\left(\frac{x^2}{y}+z\right)dy\,dz\,dx=\int_0^2\int_{-1}^1\left[x^2\,log\,y+zy\right]_{y=1}^{y=4}dz\,dx=$$

$$=\int_0^2\int_{-1}^1\left(2\,log\,2\,x^2+3z\right)dz\,dx=\int_0^2\left[2\,log\,2\,x^2z+\frac{3z^2}{2}\right]_{z=-1}^{z=1}dx=\int_0^2 4\,log\,2\,x^2\,dx=\frac{32\,log\,2}{3}.$$

Integral triple en un dominio no rectangular: definición y propiedades

La definición la haremos como en la integral doble, extendiendo la función f mediante valores nulos a un rectángulo R que contenga el dominio Ω, y haciendo entonces

$$\int_\Omega f\,dV=\int_R f_D\,dV\,.$$

Con esta definición la integral triple tiene las mismas propiedades que veíamos para la doble, es decir, *aditividad respecto del dominio*, *linealidad*, *positividad*, *orden*, y se verificará también el *teorema de la media*, es decir, existirá un real μ, acotado por el ínfimo y el supremo de f en Ω, tal que

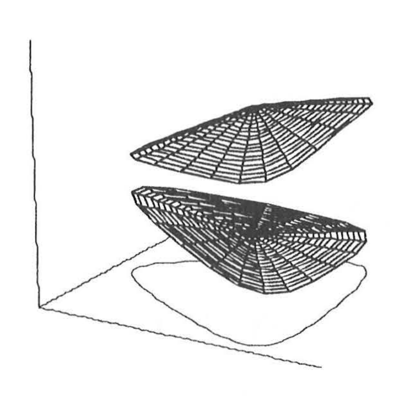
$$\int_\Omega f\,dV=\mu V(\Omega)\,,$$

siendo $\mu = f(\xi, \eta, \varsigma)$ para algún $(\xi, \eta, \varsigma) \in \Omega$ si f es continua.

A partir de ahora consideraremos, en general, funciones continuas (con la posible salvedad ya hecha en el teorema sobre la integrabilidad de éstas), y hablaremos también de regiones y dominios elementales.

Una *región elemental de tipo I* es toda parte del espacio que pueda definirse así:

$$\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\},$$



siendo D un dominio elemental del plano OXY, y ψ_1 y ψ_2 funciones de clase C^1 en D. Y *regiones elementales de tipo II* o *tipo III* serán las que puedan definirse cambiando el orden x, y, z de las variables a z, x, y o y, z, x respectivamente, llamándose *región elemental de tipo IV* la que sea a la vez de los tres tipos anteriores. Y finalmente, un *dominio elemental* será la unión de un número finito de regiones elementales disjuntas dos a dos, o bien con intersecciones *de volumen nulo* (sólo puntos frontera).

Si Ω es una región elemental de tipo I y $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, será

$$\int_\Omega f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz\, dy\, dx,$$

y lo mismo en los otros casos, permutando las variables. Y si se trata de una región elemental, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$ con las condiciones sabidas para las regiones Ω_i, será

$$\int_\Omega f\, dV = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_i} f\, dV.$$

Ejemplo 1

Sea $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$ (¿qué figura geométrica es, y qué tipo de región elemental?) y $f(x, y, z) = xyz$. La integral será:

$$\int_\Omega f = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{xyz^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\, dx =$$

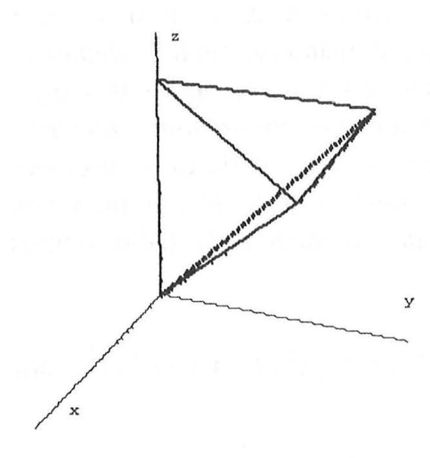
$$=\int_0^1\int_0^{1-x}\left(\frac{xy\left((1-x)^2-2(1-x)y+y^2\right)}{2}\right)dy\,dx=\int_0^1\left[\frac{x(1-x)^2y^2}{4}-\right.$$

$$\left.-\frac{2x(1-x)y^3}{6}+\frac{xy^4}{8}\right]_{y=0}^{y=1-x}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)x(1-x)^4\,dx=$$

$$=\frac{1}{24}\left(\left[-x\frac{(1-x)^5}{5}\right]_0^1+\int_0^1\frac{(1-x)^5}{5}dx\right)=\frac{1}{120}\left[-\frac{(1-x)^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{720}.$$

Ejemplo 2

Calculemos el valor de



$$A=\int_0^1\int_x^1\int_y^1 z\,e^{y^2}\,dz\,dy\,dx$$

mediante una integral iterada. Por ejemplo,

$$A=\int_0^1\int_x^1\left[\frac{1}{2}z^2e^{y^2}\right]_{z=y}^{z=1}dy\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\int_x^1\left(1-y^2\right)e^{y^2}\,dy\,dx=\ldots$$

no podemos continuar; pero el dominio es una región de tipo IV, luego podemos elegir como queramos el orden de las variables: por ejemplo,

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 1,\,x\le y\le 1,\,y\le z\le 1\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 1,\,0\le y\le z,\,0\le x\le y\right\};$$

con lo cual

$$A=\int_0^1\int_0^z\int_0^y z\,e^{y^2}\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\int_0^z z\,y\,e^{y^2}\,dy\,dz=\int_0^1\left[z\frac{1}{2}e^{y^2}\right]_{y=0}^{y=z}dz=\frac{1}{2}\int_0^1\left(z\,e^{z^2}-z\right)dz=$$

$$=\frac{1}{4}\left[e^{z^2}-z^2\right]_0^1=\frac{1}{4}(e-1-1)=\frac{e-2}{4},$$

lo que ilustra aquí de nuevo la importancia que puede tener el orden de las variables al integrar iteradamente.

Cambio de variables

Todo lo relativo a la geometría de las transformaciones en $\boldsymbol{R}^2$ es aplicable punto por punto en $\boldsymbol{R}^3$, cambiando ahora áreas por volúmenes, con lo que, recordando las conclusiones a las que allí llegábamos podemos enunciar:

Teorema. Sean Ω un dominio elemental del espacio real, f una función continua (con las salvedades conocidas) en Ω y $\Phi\colon \Omega^* \to \Omega$ una biyección de clase C^1. Entonces

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega^*} f \circ \Phi \cdot |J_{\Phi}|,$$

o bien

$$\int_{\Omega} f(x,y,z)\, dV = \int_{\Omega^*} f\left(\Phi(u,v,w) \left| J\frac{(x,y,z)}{(u,v,w)} \right| \right) du\, dv\, dw\,.$$

Ejemplo 1

Calculemos la integral de la función continua $f : \Omega \to \boldsymbol{R}$, donde $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x^2+y^2}$ y $\Omega = \left\{ (x,y,z) \middle| 1 \le x^2+y^2 \le 4, 1 \le z \le 2 \right\}$, mediante el cambio de variables

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta \\ z = z\,, \end{cases}$$

cuyo jacobiano es

$$J\frac{(x,y,z)}{(r,\theta,z)} = r$$

(que sólo se anula en *una recta*, el eje. *OZ*, por lo que no hay problemas con la biyectividad). Será:

$$f^*(r,\theta,z) = f(\Phi(r,\theta,z)) = \frac{z}{r^2}, \quad \Omega^* = \left\{ (r,\theta,z) \middle| 1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi, 1 \le z \le 2 \right\},$$

$$\int_{\Omega} f(x,y,z)\, dV = \int_{\Omega^*} f^*(r,\theta,z)\, r\, dr\, d\theta\, dz = \int_1^2 \int_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{z}{r^2} r\, d\theta\, dz\, dr =$$

$$= 2\pi \int_1^2 \int_1^2 \frac{z}{r} dz\, dr = 2\pi \int_1^2 \left[\frac{z^2}{2r} \right]_{z=1}^{z=2} dr = \pi \int_1^2 \frac{3}{r} dr = 3\pi \log 2\,.$$

Naturalmente, este cambio de variables ha sido a las que conocemos como *coordenadas cilíndricas*, que consisten simplemente en tomar coordenadas polares en el plano *OXY* dejando la *z* invariable (la ecuación $r = k$ es la de un *cilindro* de revolución, de radio *k* y eje el *OZ*).

Recordemos igualmente las *coordenadas esféricas*, definidas por las relaciones

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \, sen\,\varphi \\ y = \rho \, sen\,\theta \, sen\,\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

(ρ es ahora la distancia del punto al origen, y $\rho = k$ es la ecuación de una *esfera* de radio *k* y centro el origen), cuyo jacobiano será

$$J\frac{(x,y,z)}{(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta \, sen\,\varphi & -\rho \, sen\,\theta \, sen\,\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ sen\,\theta \, sen\,\varphi & \rho\cos\theta \, sen\,\varphi & \rho \, sen\,\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho \, sen\,\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2\left(\cos\varphi(-sen\,\varphi\cos\varphi) - sen\,\varphi \, sen^2\,\varphi\right) = -\rho^2 \, sen\,\varphi \, ,$$

que se anula también sólo en el eje *OZ*.

Ejemplo 2

Calculemos la integral de $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ en la esfera de centro el origen y radio a, Ω:

$$\Omega^* = \{(\rho,\theta,\varphi) \mid 0 \le \rho \le a,\, 0 \le \theta \le 2\pi,\, 0 \le \varphi \le \pi\}, \quad f^*(\rho,\theta,\varphi) = \rho \, ,$$

$$\int_\Omega f\,dV = \int_0^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho^3 \, sen\,\varphi \, d\theta \, d\varphi \, d\rho = 2\pi\int_0^a \rho^3\left[-\cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\rho = 4\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^a = \pi a^4 \, .$$

Aplicaciones de la integral triple

Lo mismo que en el caso de la integral doble, las aplicaciones de la triple serán geométricas, en el cálculo de volúmenes, y físicas en el de masas, centros de gravedad y momentos de inercia, ahora de sólidos en el espacio de tres dimensiones.

Volúmenes

Naturalmente, dado un recinto Ω tendremos simplemente:

$$V(\Omega) = \int_\Omega dV \, .$$

Ejemplo 1

Calculemos el volumen de un elipsoide de semiejes a, b y c. Para ello haremos el cambio obvio

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta\, sen\,\varphi \\ y = b\rho\, sen\,\theta\, sen\,\varphi \\ z = c\rho\cos\varphi, \end{cases}$$

cuyo jacobiano es

$$J\frac{(x,y,z)}{(\rho,\theta,\varphi)} = -abc\rho^2\, sen\,\varphi$$

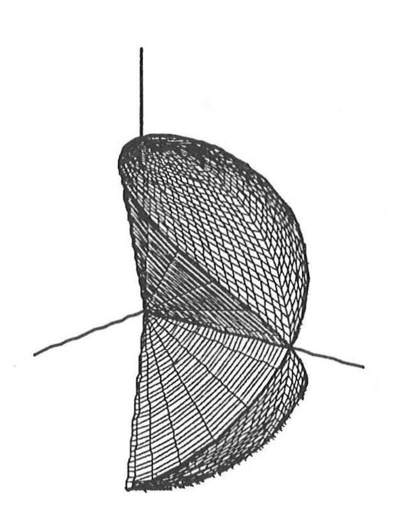
y con el que el elipsoide referido a sus ejes se convierte en

$$\rho = 1,$$

siendo por lo tanto su volumen

$$V(\Omega) = \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} abc\rho^2\, sen\,\varphi\, d\theta\, d\varphi\, d\rho = 2\pi\, abc\int_0^1 \rho^2[-\cos\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\, d\rho = \frac{4}{3}\pi\, abc\,.$$

Ejemplo 2



Sea ahora el sólido Ω definido, en coordenadas esféricas, por la superficie

$$\theta = \varphi$$

y la esfera

$$\rho = R$$

(ver figura). En virtud de las evidentes simetrías y para conseguir que el signo de $sen\,\varphi$, y por lo tanto el del jacobiano, se conserve positivo (lo que facilitará el cálculo del volumen), consideraremos sólo un cuarto del sólido:

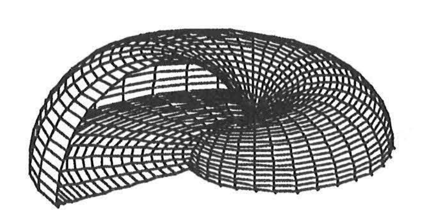
$$\Omega_4 = \left\{(\rho,\theta,\varphi)\middle| 0\le\rho\le R,\, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\, 0\le\varphi\le\theta\right\};$$

con ello, el volumen será

$$V(\Omega) = 4\int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\theta} \rho^2\, sen\,\varphi\, d\varphi\, d\theta\, d\rho = 4\int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\rho^2 \cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\theta} d\theta\, d\rho =$$

$$= 4\int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2(1-\cos\theta)\, d\theta\, d\rho = 4\int_0^R \rho^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) d\rho = \frac{2(\pi-2)R^3}{3}.$$

Ejemplo 3



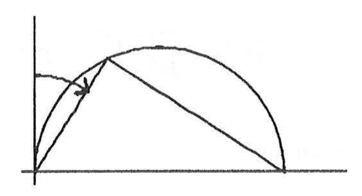
Consideremos una bóveda engendrada por un arco de medio punto que gira alrededor de uno de sus apoyos según un ángulo θ, a la vez que su luz crece proporcionalmente a θ, como muestra la figura.

Si la luz de cada arco es $k\theta$, donde k es una constante dada, la ecuación de la superficie, en coordenadas esféricas, será

$$\rho = k\theta\, sen\,\varphi,$$

y el espacio cubierto, suponiendo que θ varía entre π y 3π,

$$\Omega = \left\{(\rho,\theta,\varphi)\middle|\, 0 \le \rho \le k\theta\, sen\,\varphi,\ \pi \le \theta \le 3\pi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\};$$



con todo ello, el volumen será

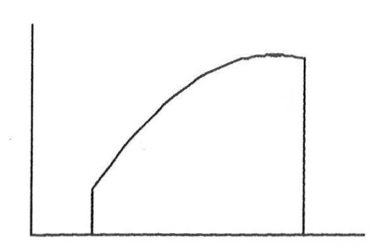
$$V(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\pi}^{3\pi} \int_0^{k\theta\, sen\varphi} \rho^2\, sen\,\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\pi}^{3\pi} \frac{k^3\theta^3\, sen^3\varphi}{3}\, sen\,\varphi\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{k^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{81\pi^4}{4}-\frac{\pi^4}{4}\right) sen^4\varphi\, d\varphi = \frac{20k^3\pi^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{5k^3\pi^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

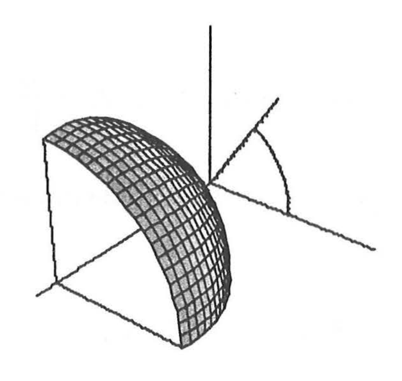
$$= \frac{5k^3\pi^4}{3}\left[\frac{3\varphi}{2} - sen\,2\varphi + \frac{sen\,4\varphi}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5k^3\pi^5}{4}.$$

Caso de un sólido de revolución



Sea f una función de una variable, definida y continua en un intervalo $[a,b]$. Supongamos que, en $\boldsymbol{R}^3$, hacemos *girar* la curva $y = f(x)$ alrededor del eje *OX*: se engendrará un cierto sólido de revolución, Ω. Vamos a calcular su volumen pasando a las variables

$$\begin{cases} x = x \\ y = r\cos\theta \\ z = r\,sen\,\theta \end{cases}$$



es decir, a unas coordenadas cilíndricas cuyo eje $r = 0$ es el *OX*, cambio cuyo jacobiano es evidentemente r (en la figura, para mayor claridad, θ varía sólo de 0 a $\frac{\pi}{2}$). La curva generatriz de la superficie que envuelve Ω será ahora $r = |f(x)|$ en el plano $\theta = 0$, y el sólido Ω será el transformado de

$$\Omega^* = \{(x,r,\theta)|\, a \le x \le b,\, 0 \le r \le |f(x)|,\, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Con lo que el volumen será

$$V = \int_a^b \int_0^{|f(x)|} \int_0^{2\pi} r\,d\theta\,dr\,dx = 2\pi \int_a^b \int_0^{|f(x)|} r\,dr\,dx = 2\pi \int_a^b \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=|f(x)|} dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx,$$

expresión conocida que permite el cálculo del volumen mediante una integral simple.

Ejemplo

Calculemos el volumen del sólido engendrado por un arco de sinusoide entre dos ceros consecutivos. Será

$$V = \pi \int_0^\pi sen^2\,x\,dx = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{sen\,2x}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

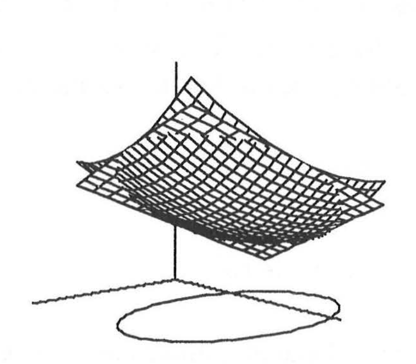
Masas y centros de gravedad

Al pasar de dominios bidimensionales a tridimensionales las integrales serán triples y no dobles, pero los planteamientos, definiciones y cálculos serán en todo análogos a los vistos en el primer caso. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Consideremos el sólido Ω limitado por las superficies

$$\begin{cases} z_1 = 9x + 14y - 20 \\ z_2 = x^2 + 4y^2 + 5x - 18y + 32 \end{cases}$$



y cuya densidad en cada punto es

$$m(x,y,z) = \frac{yz}{50};$$

calculemos su densidad media, es decir, $\overline{m} = \dfrac{M}{V}$.

La proyección sobre el plano *OXY* de la intersección del plano y el paraboloide elíptico será, haciendo $z_1 = z_2$, la elipse

$$x^2 - 4x + 4y^2 - 32y + 52 = 0, \quad \text{o bien} \quad (x-2)^2 + (2y-8)^2 - 16 = 0,$$

o finalmente

$$\frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(y-4)^2}{2^2} = 1.$$

Esto sugiere el cambio

$$\begin{cases} x = 2 + 4r\cos\theta \\ y = 4 + 2r\,sen\,\theta \\ z = z, \end{cases}$$

cuyo jacobiano es $8r$.

Las superficies son, después de operar,

$$\begin{cases} z_1 = 54 + 36r\cos\theta + 28r\,sen\,\theta \\ z_2 = 38 + 36r\cos\theta + 28r\,sen\,\theta + 16r^2, \end{cases}$$

y el sólido

$$\Omega^* = \left\{(r,\theta,z) \,\middle|\, 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, z_2 \le z \le z_1\right\}.$$

Con todo ello podemos ya calcular el volumen y la masa (abreviaremos algunas simplificaciones):

$$V = \int_\Omega dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{z_2}^{z_1} 8\,r\,dz\,d\theta\,dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 8\,r\left(z_1 - z_2\right) d\theta\,dr =$$

$$= 8\int_0^1 \int_0^{2\pi} r\left(16 + 16r^2\right) d\theta\,dr = 256\pi \int_0^1 \left(r + r^3\right) dr = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) 256\pi = 192\pi \cong 603{,}1858\,;$$

$$M = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{z_2}^{z_1} \frac{(4 + 2r\,sen\,\theta)z}{50} 8r\,dz\,d\theta\,dr = \frac{4}{25}\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(4r + 2r^2\,sen\,\theta\right) \frac{z_1^{\,2} - z_2^{\,2}}{2} d\theta\,dr =$$

$$= \frac{4}{25}\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(4r + 2r^2\,sen\,\theta\right) 64\left(1 - r^2\right)\left(19 + 2r^2 + 9r\cos\theta + 7r\,sen\,\theta\right) d\theta\,dr =$$

$$= \frac{256}{25}\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(1 - r^2\right)\left(76r + 8r^3 + \left(66r^2 + 4r^4\right) sen\,\theta + 36r^2\cos\theta +\right.$$

$$\left. + 18r^3\,sen\,\theta\cos\theta + 7r^3\left(1 - \cos 2\theta\right)\right) d\theta\,dr = \frac{256}{25}\int_0^1 \left(1 - r^2\right)\left(76r + 15r^3\right) 2\pi\,dr =$$

$$= \frac{512\pi}{25}\int_0^1 \left(76r - 61r^3 - 15r^5\right) dr = \frac{512\pi}{25}\left(38 - \frac{61}{4} - \frac{5}{2}\right) = \frac{10368\pi}{25} \cong 1302{,}8813\,;$$

y finalmente

$$\overline{m} = \frac{10368\pi}{25}\frac{1}{192\pi} = \frac{54}{25} = 2{,}16\,.$$

Ejemplo 2

Calculemos la masa y el c.d.g. de una esfera de radio a y cuya densidad es, respecto de un sistema de referencia con centro en el de la esfera, $m(x, y, z) = 2a - z$.

$$M = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(2a - \rho\cos\varphi\right)\rho^2\,sen\,\varphi\,d\theta\,d\varphi\,d\rho =$$

$$= 2\pi\int_0^a \left[-2a\rho^2\cos\varphi - \rho^3\frac{sen^2\,\varphi}{2}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\rho = 2\pi\int_0^a 4a\rho^2\,d\rho = \frac{8\pi a^4}{3}\,.$$

Por simetría,

$$\overline{x} = \overline{y} = 0\,;$$

$$M\,\overline{z} = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho\cos\varphi\left(2a - \rho\cos\varphi\right)\rho^2\,sen\,\varphi\,d\theta\,d\varphi\,d\rho = 2\pi\int_0^a \int_0^\pi \left(2a\rho^3\cos\varphi\,sen\,\varphi -\right.$$

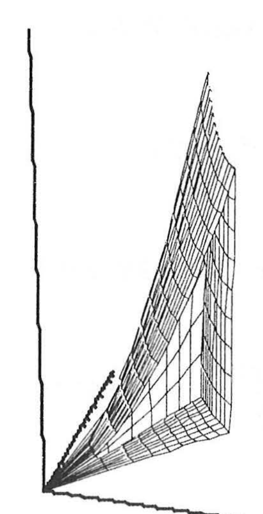
$$\left. - \rho^4\cos^2\varphi\,sen\,\varphi\right) d\varphi\,d\rho = 2\pi\int_0^a \left[a\rho^3\,sen^2\,\varphi + \rho^4\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\rho =$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\int_0^a \rho^4\, d\rho = -\frac{4\pi a^5}{15}; \quad \bar{z} = -\frac{4\pi a^5}{15}\frac{3}{8\pi a^4} = -\frac{a}{10}.$$

El centro de gravedad es el punto

$$\left(0, 0, -\frac{a}{10}\right).$$

Ejemplo 3

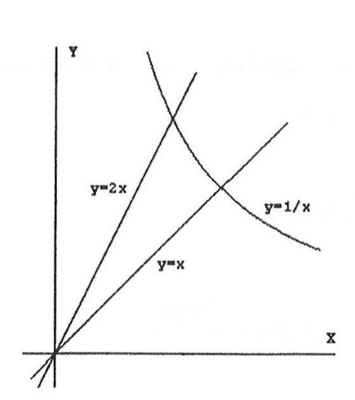


Sea ahora el sólido Ω, de densidad constante, limitado en el semiespacio $x \geq 0$ por las superficies

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ xy - 1 = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Para calcular su baricentro haremos el cambio de variables

$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{x} \\ v = xy \\ z = z \end{cases}$$



cuyo jacobiano vamos a calcular: como

$$J\frac{(u,v,z)}{(x,y,z)} = \begin{vmatrix} -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2y}{x},$$

invirtiendo,

$$\left| J\frac{(x,y,z)}{(u,v,z)} \right| = \left| \frac{x}{2y} \right| = \frac{1}{2|u|}.$$

Por otro lado,

$$\begin{cases} uv = y^2 \\ \dfrac{v}{u} = x^2 \end{cases}$$

con lo que

$$\Omega^* = \left\{(u,v,z) \middle| 1 \le u \le 2, 0 \le v \le 1, 0 \le z \le \left(u + \frac{1}{u}\right)v\right\}.$$

$$V = \int_1^2 \int_0^1 \int_0^{\left(u+\frac{1}{u}\right)v} \frac{1}{2u} dz\, dv\, du = \int_1^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2u^2}\right) v\, dv\, du = \frac{1}{4} \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du =$$

$$= \frac{1}{4}\left[u - \frac{1}{u}\right]_1^2 = \frac{1}{4}\left(2 - \frac{1}{2} - 1 + 1\right) = \frac{3}{8};$$

$$V\,\overline{x} = \int_1^2 \int_0^1 \int_0^{\left(u+\frac{1}{u}\right)v} \sqrt{\frac{v}{u}} \frac{1}{2u} dz\, dv\, du = \int_1^2 \int_0^1 \frac{\sqrt{v}}{2u^{3/2}} \left(u + \frac{1}{u}\right) v\, dv\, du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{u^{5/2}}\right) v^{3/2}\, dv\, du = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{u^{5/2}}\right) du =$$

$$= \frac{1}{5}\left[2\sqrt{u} - \frac{2}{3u^{3/2}}\right]_1^2 = \frac{1}{5}\left(2\sqrt{2} - \frac{2}{6\sqrt{2}} - 2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{11\sqrt{2} - 8}{30}, \quad \overline{x} = \frac{8\left(11\sqrt{2} - 8\right)}{90};$$

$$V\,\overline{y} = \int_1^2 \int_0^1 \int_0^{\left(u+\frac{1}{u}\right)v} \sqrt{uv} \frac{1}{2u} dz\, dv\, du = \int_1^2 \int_0^1 \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} \left(u + \frac{1}{u}\right) v\, dv\, du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_0^1 \left(\sqrt{u} + \frac{1}{u^{3/2}}\right) v^{3/2}\, dv\, du = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2}{5}\left(\sqrt{u} + \frac{1}{u^{3/2}}\right) du =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{2u^{3/2}}{3} - \frac{2}{u^{1/2}}\right]_1^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3} + 2\right) = \frac{\sqrt{2} + 4}{15}, \quad \overline{y} = \frac{8\left(\sqrt{2} + 4\right)}{45};$$

$$V\,\overline{z} = \int_1^2 \int_0^1 \int_0^{\left(u+\frac{1}{u}\right)v} z \frac{1}{2u} dz\, dv\, du = \frac{1}{4} \int_1^2 \int_0^1 \left(u + \frac{1}{u}\right)^2 v^2 \frac{1}{u}\, dv\, du = \frac{1}{12} \int_1^2 \left(u + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^3}\right) du =$$

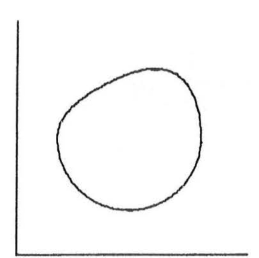
$$= \frac{1}{12}\left[\frac{u^2}{2} + 2\log u - \frac{1}{2u^2}\right]_1^2 = \frac{1}{12}\left(2 + 2\log 2 - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{15 + 16\log 2}{96},$$

$$\overline{z} = \frac{15 + 16\log 2}{36}.$$

El centro de gravedad es el punto

$$\left(\frac{8\left(11\sqrt{2}-8\right)}{90},\frac{8\left(\sqrt{2}-4\right)}{45},\frac{15+16\log 2}{36}\right)\cong\left(0{,}6717,\ 0{,}9625,\ 0{,}7247\right).$$

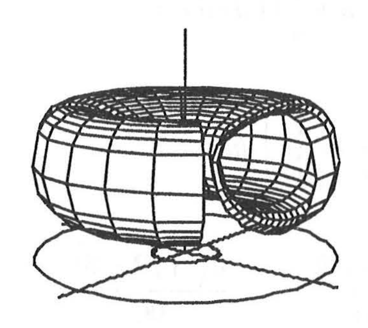
Teorema de Guldin



Sea D un dominio en el plano OXZ, que para mayor facilidad supondremos que es una región elemental de tipo I (el resultado es válido para cualquier dominio elemental):

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,a\leq x\leq b,\varphi_1(x)\leq z\leq\varphi_2(x)\right\}.$$

Si es A el área de D y $\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ su centro de gravedad, sabemos que



$$A\overline{x}=\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}x\,dz\,dx.$$

Supongamos que D *gira* alrededor de OZ; engendrará un recinto Ω que será, pasando a coordenadas cilíndricas, el transformado de

$$\Omega^*=\left\{(r,\theta,z)\,\middle|\,a\leq r\leq b,0\leq\theta\leq 2\pi,\right.$$
$$\left.\varphi_1(r)\leq z\leq\varphi_2(r)\right\}$$

(para mayor claridad, en la figura hemos hecho un giro incompleto). El volumen de Ω será

$$V=\int_a^b\int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)}\int_0^{2\pi}r\,d\theta\,dz\,dr=2\pi\int_a^b\int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)}r\,dz\,dr=2\pi\,\overline{x}\,A.$$

Es decir, hemos demostrado el siguiente

Teorema (Guldin). El volumen del sólido engendrado por el giro de un dominio elemental plano D alrededor de un eje situado en su plano y que no lo corta, es igual al producto del área de D por la longitud de la circunferencia descrita por su centro de gravedad.

Como aplicación resulta inmediato, por ejemplo, el cálculo del volumen del toro T, engendrado por un círculo de radio r al girar alrededor de un eje situado a una distancia R de su centro ($R>r$):

$$V(T)=\pi r^2\cdot 2\pi R=2\pi^2Rr^2,$$

como puede comprobarse fácilmente mediante una integral simple.

Momentos de inercia

El momento de inercia (o momento de segundo orden) de un sólido Ω respecto de un eje, el OZ por ejemplo, vendrá dado, si es $m(x,y,z)$ su densidad, por

$$I_z = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) m(x,y,z)\, dV ,$$

y permutando las variables obtendremos las expresiones para I_x e I_y.

Ejemplo

Momento de inercia de un paralelepípedo rectángulo, de dimensiones $a \times b \times c$ y densidad constante m, respecto del eje de simetría paralelo al lado de longitud a.

$$I = m\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\int_0^a (y^2 + z^2)\, dx\, dz\, dy = m\,a\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[y^2 z + \frac{z^3}{3} \right]_{z=-\frac{c}{2}}^{z=\frac{c}{2}} dy = m\,a\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(cy^2 + \frac{c^3}{12} \right) dy =$$

$$= m\,a\left[\frac{cy^3}{3} + \frac{c^3 y}{12} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{a(cb^3 + c^3 b)}{12} m = \frac{(b^2 + c^2)M}{12} .$$

Sea e una recta y G el centro de gravedad de Ω. Tomemos como eje OZ una recta paralela a e que pase por G, y sean entonces

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

las ecuaciones de e. Como

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + d^2 ,$$

siendo $d^2 = a^2 + b^2$ el cuadrado de la distancia entre ambos ejes, al integrar resulta

$$I_e = I_z + M d^2 ,$$

donde M es la masa de Ω, es decir, un teorema análogo al obtenido en el plano. Recordemos su enunciado:

Teorema. El momento de inercia respecto de un eje cualquiera es igual al momento respecto del eje paralelo que pasa por el centro de gravedad más el producto de la masa por el cuadrado de la distancia entre ambos ejes.

Ejemplo

Calculemos el momento de inercia respecto del eje OZ de la esfera vista en el ejemplo 2 de la página 34, pero considerando ahora las longitudes en metros y la densidad en Tm/m^3. Operando en coordenadas esféricas es $x^2 + y^2 = \rho^2\, sen^2\, \varphi$, con lo que

$$I_z = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^2\, sen^2\, \varphi (2a - \rho \cos \varphi) \rho^2\, sen\, \varphi \, d\theta \, d\varphi \, d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^a \int_0^\pi \left(2a\rho^4\, sen^3\, \varphi - \rho^5\, sen^3\, \varphi \cos \varphi\right) d\varphi \, d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^a \int_0^\pi \left(2a\rho^4 \left(sen\, \varphi - \cos^2 \varphi\, sen\, \varphi\right) - \rho^5\, sen^3\, \varphi \cos \varphi\right) d\varphi \, d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^a \left[2a\rho^4 \left(-\cos \varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right) - \rho^5 \frac{sen^4\, \varphi}{4} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\rho =$$

$$= \frac{16\pi a}{3} \int_0^a \rho^4 \, d\rho = \frac{16\pi a^6}{15}\ \mathrm{Tm} \cdot \mathrm{m}^2 .$$

Bibliografía

Libros básicos:

A. Doneddu: *Analyse et géometrie différentielle.* Dunod, 1973
S. Lang: *Cálculo II.* Fondo Educativo Interamericano, 1976.
R. E. Larson, R. P. Hostetler, B. H. Edwards: *Cálculo, 2.* McGraw-Hill, 1995.
J. E. Marsden, A. J. Tromba: *Cálculo vectorial.* Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.

Otros libros:

G. Chilov: *Fonctions de plusieurs variables reélles.* Mir, 1978.
J. Lelong-Ferrand, J.-M. Arnaudiès: *Équations différentielles, intégrales multiples.* Dunod, 1974.

ÍNDICE

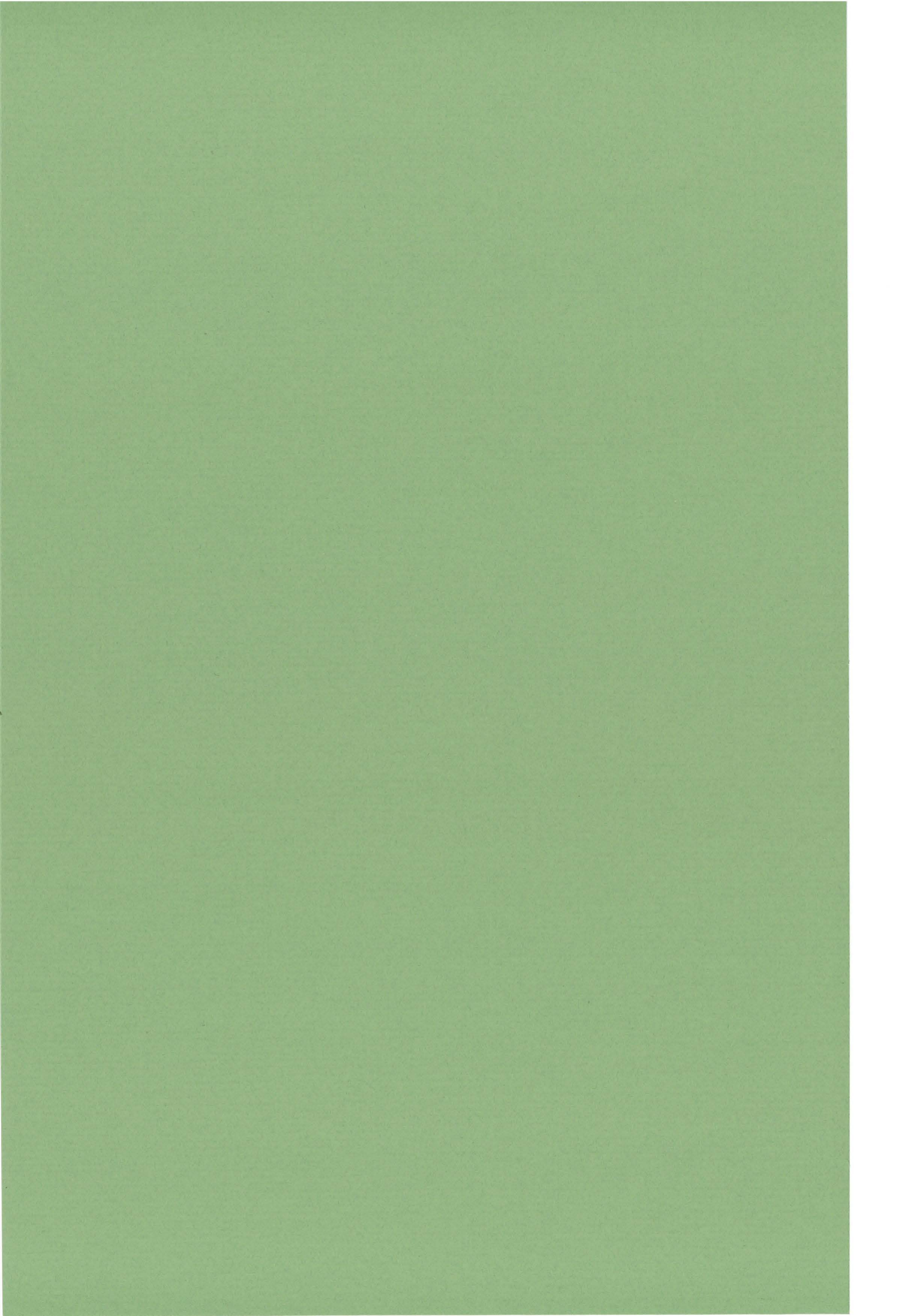
I - Integral doble

II - Integral triple

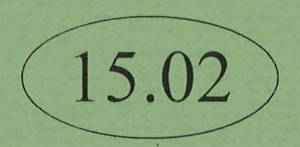
NOTAS

NOTAS

NOTAS



CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN

http://www.aq.upm.es/of/jherrera

info@mairea-libros.com

